Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2018/2019 учебного года

Математика

11 класс

1. При каких значениях c числа sin α и cos α являются корнями квадратного уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$ (α – некоторый угол)?

Решение

По теореме Виета $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$. Тогда $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 0{,}36$. Следовательно, $\sin\alpha\cos\alpha = -0{,}32$ и $c = 5\sin\alpha\cos\alpha = -1{,}6$. Корни полученного уравнения действительно являются синусом и косинусом некоторого угла, так как уравнение $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$, очевидно, имеет корни.

Ответ

При $c = -1{,}6$.

2. В баскетбольном турнире участвовало 20 команд (каждая сыграла с каждой из остальных по одному матчу). Могло ли в результате оказаться так, что каждая из команд-участниц выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

Решение

Будем давать за победу два очка, за ничью – одно, за поражение – ноль. Если журналист прав, тогда число очков, набранных каждым участником, кратно 3. Но всего в турнире сыграно $10\cdot 19$ матчей, а значит разыгрывается $20\cdot 19$ очков, а это число на 3 не делится.

Ответ

Не могло.

3. Докажите, что если выражение $\frac{x}{x^2+x+1}$ принимает рациональное значение, то и выражение $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ также принимает рациональное значение.

Решение

Пусть $\frac{x}{x^2+x+1}=a$, где a — рациональное число.

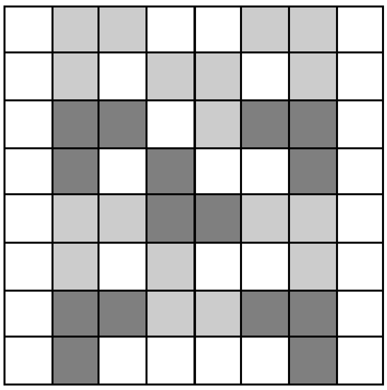
1) Если $a=0$, то $x=0$, тогда $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=0$, то есть рационально.

2) Если $a \neq 0$, то $x \neq 0$, тогда $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}=a$, откуда $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1$. Следовательно, $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-1}=\frac{1}{(\frac{1}{a}-1)^2-1}=\frac{a^2}{1-2a}$. Заметим, что $a \neq \frac{1}{2}$, иначе $x+\frac{1}{x}=1$, что невозможно ни при каких x. При любых других рациональных значениях a выражение $\frac{a^2}{1-2a}$ принимает рациональные значения, что и требовалось.

4. Какое наименьшее количество трехклеточных уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?

Решение

В каждом квадрате 2×2, по крайней мере, две клетки должны быть покрыты уголками, (иначе в такой квадрат поместится еще один уголок). Квадрат 8×8 можно разбить на 16 квадратов размером 2×2 каждый, то есть уголками должно быть покрыто не менее тридцати двух клеток, для чего потребуется не менее, чем 11 уголков. Пример размещения одиннадцати уголков — см. рис.

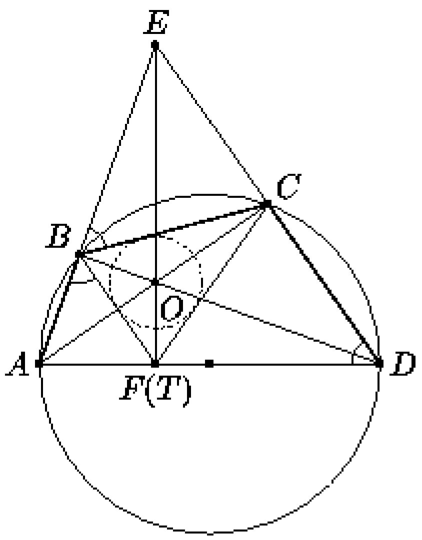


Ответ

11.

5. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность с диаметром *AD*; *O* — точка пересечения его диагоналей *AC* и *BD* является центром другой окружности, касающейся стороны *BC*. Из вершин *B* и *C* проведены касательные ко второй окружности, пересекающиеся в точке *T*. Докажите, что точка *T* лежит на отрезке *AD*.

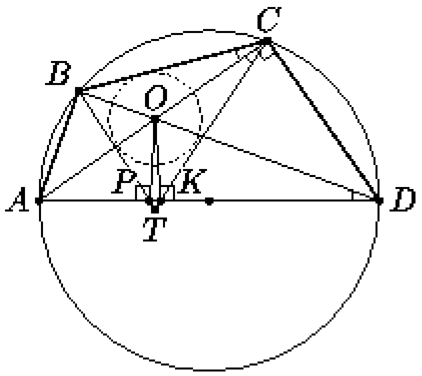
Решение



Первый способ. Пусть прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *E*. Заметим, что $\angle ACD = \angle ABD = 90^o$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Тогда *AC* и *BD* — высоты треугольника *DAE,* а точка *O* является точкой пересечения высот этого треугольника (ортоцентром). Следовательно, *EF* — еще одна высота треугольника *DAE* — содержит точку *O*. Докажем, что вторая окружность, упомянутая в условии задачи, совпадает с окружностью, вписанной в треугольник *BCF*. Воспользуемся вспомогательным утверждением: высоты треугольника *DAE* являются биссектрисами треугольника *BCF* (его ортотреугольника)(**). Следовательно, точка пересечения высот треугольника *DAE* (точка *O*) является центром окружности, вписанной в треугольник *BCF*. Тогда вписанная окружность совпадает с окружностью, заданной в условии, поскольку эти окружности имеют общий центр и обе касаются прямой *BC*. Таким образом, касательные к окружности, проведенные из точек *B* и *C*, являются сторонами треугольника *BCF* и пересекаются на стороне *AD* в точке *F*, то есть точка *F* совпадает с точкой *T*. Следовательно, точка *T* лежит на диаметре *AD*, что и требовалось.

(**) Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что $\angle FBA = \angle EBC$. Это, в свою очередь, следует из того, что каждый из этих углов равен углу *AD* . Действительно, $\angle EBC = 90^o - \angle CBD = 90^o - \angle CAD = \angle ADE$. Аналогично, если рассмотреть окружность, проходящую через точки *B*, *F*, *D* и *E*, получим, что $\angle EBC = \angle ADE$. Другой возможный способ — доказать, что каждый из треугольников *ABF* и *BEC* подобен треугольнику *AED*.

Второй способ.



Пусть точка T не лежит на отрезке AD. Тогда прямая CT пересекает AD в некоторой точке K, а прямая BT пересекает AD в точке P. Используя то, что CA — биссектриса угла BCK и свойство углов, вписанных в окружность, получим: $\angle ACK = \angle BCA = \angle BDA$, следовательно, около четырёхугольника $OCDK$ можно описать окружность. При этом, угол OCD — прямой (вписанный и опирается на диаметр AD). Значит, и угол OKD — также прямой. Аналогично доказывается, что угол OPA — прямой. Таким образом, через точку O проходят два перпендикуляра к одной прямой AD, что невозможно. Значит, точки P и K совпадают с точкой T, что и требовалось.

При решении первым способом от учащихся не требуется доказательство вспомогательного утверждения (если оно сформулировано), а при решении вторым способом — не требуется рассмотрения различных случаев расположения точки T относительно прямой AD.