Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2018/2019 учебного года

Математика

10 класс

1. Из ряда натуральных чисел вычеркнули все числа, которые являются квадратами или кубами целых чисел. Какое из оставшихся чисел стоит на сотом месте?

Решение

Рассмотрим первую сотню натуральных чисел. Среди этих чисел десять квадратов (от 1 до $10^2 = 100$) и четыре куба (от 1 до $4^3 = 64$). Учтем, что два из этих чисел, а именно, 1 и 64 являются одновременно квадратами и кубами. Таким образом, из первой сотни вычеркнули 12 чисел. Среди следующих двенадцати чисел нет ни квадратов, ни кубов ($11^2 = 121$, $5^3 = 125$), следовательно, среди оставшихся чисел на сотом месте стоит число 112.

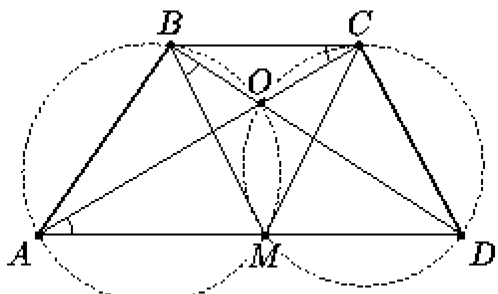
Ответ

112.

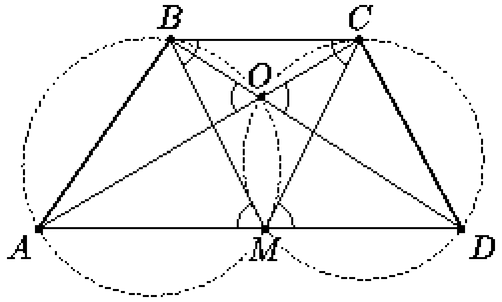
2. Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Описанные окружности треугольников *AOB* и *COD* пересекаются в точке *M* на основании *AD*. Докажите, что треугольник *BMC* равнобедренный.

Решение

Первый способ. По теореме об углах, вписанных в окружность, $\angle OBM = \angle OAM$ (см. рис.). По определению трапеции $\angle OAM = \angle OCB$. Таким образом, $\angle OBM = \angle OCB$. Аналогично доказывается, что $\angle OCM = \angle OBC$. Складывая полученные равенства, найдём, что $\angle MBC = \angle MCB$, то есть, $BM = CM$.



Второй способ. Рассмотрим цепочку равенств: $\angle CBM = \angle BMA = \angle BOA = \angle COD = \angle CMD = \angle BCM$ (см. рис.). Первое и пятое равенства вытекают из параллельности оснований трапеции, второе и четвёртое — из свойства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, третье — равенство вертикальных углов. Из доказанного вытекает, что $\angle CBM = \angle BCM$, то есть, $BM = CM$.



3. Существуют ли нечётные целые числа x, y и z, удовлетворяющие равенству $(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2$?

Решение

После раскрытия скобок и сокращения подобных получим $x^2 + xy + xz = yz$, откуда $(x + y)(x + z) = 2yz$. Если x, y и z нечётны, то левая часть делится на 4, а правая – нет. Противоречие.

Ответ

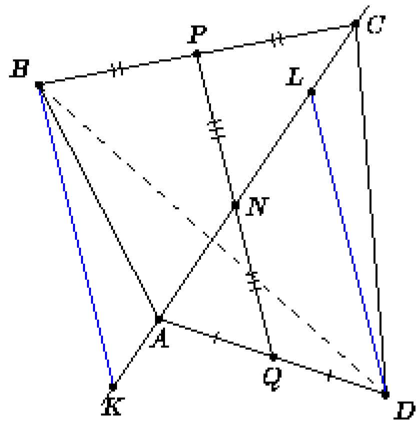
Не существуют

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон BC и AD. В каком отношении она делит диагональ BD?

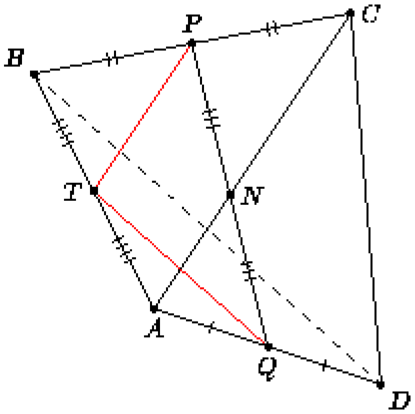
Решение

Пусть P — середина BC, Q — середина AD, N — середина PQ.

Первый способ. Выберем на прямой AC такие точки K и L (см. рисунок), что $BK||PQ||DL$. Тогда в треугольнике BCK отрезок PN параллелен основанию и проходит через середину стороны, так что это средняя линия, откуда $BK=2PN$. Аналогично $DL=2QN$. Так как $PN=QN$, то $DL=BK$. Поскольку $BK||DL$ и $BK=DL$, то $BKDL$ — параллелограмм, поэтому KL делит BD пополам.



Второй способ. Пусть T — середина отрезка AB . Проведем отрезки TP и TQ (см. рисунок). Тогда TP — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $TP||AC$. В треугольнике PQT прямая AC делит сторону PQ пополам и параллельна TP, поэтому она пересекает сторону TQ в ее середине. Так как $TQ||BD$, то прямая AC делит пополам отрезок BD.



Третий способ. Снабдим вершины четырёхугольника единичными массами. Тогда центром масс этой системы будет точка N. Но центром масс точек A и C является середина отрезка AC, аналогично и для точек B и D. Значит, N — середина отрезка, соединяющего середины AC и BD. Таким образом, AC делит отрезок BD пополам.

Четвертый способ. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Тогда $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$. По условию, точка N лежит на отрезке AC , то есть $\overrightarrow{AN}$ коллинеарен $\vec{c}$: $\overrightarrow{AN}=k\vec{c}$. Тогда $\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=k\vec{c}$, откуда $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}=\frac{4k-1}{2}\cdot\vec{c}$, то есть вектор, с началом в точке A и концом в середине BD, коллинеарен $\overrightarrow{AC}$. Тем самым доказано, что AC делит отрезок BD пополам.

Ответ

пополам.

5. Дан набор, состоящий из таких 2019 чисел, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

Решение

Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = M – a$. Просуммируем эти равенства для всех a:

$$b_1 + ... + b_{2019} = 2019M – (a_1 + ... + a_{2019}),$$

так как $b_1 + ... + b_{2019} = a_1 + ... + a_{2019} = M$, откуда $M = 0$. Значит, для любого a число $b = – a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары $(a, – a)$. Из нечётности их количества следует, что в набор входит число $a = – a$, то есть $a = 0$.