Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2018/2019 учебного года

Математика

9 класс

1. Городской чемпионат по шашкам проводили по олимпийской системе. Победитель выиграл шесть партий. Сколько участников турнира выиграло игр больше, чем проиграло? (На турнире по олимпийской системе участников разбивают на пары. Те, кто проиграл игру в первом туре, выбывают. Тех, кто выиграл в первом туре, снова разбивают на пары. Те, кто проиграл во втором туре, выбывают и т. д. В каждом туре для каждого участника нашлась пара.)

Решение

Так как в каждом туре для каждого игрока нашлась пара и в каждой паре один из игроков выбывал, то общее количество игроков после каждого тура уменьшалось в два раза. Победитель участвовал в каждом туре и побеждал, значит, всего туров было шесть. Следовательно, всего участников было $2^6 = 64$. Проигравшие в первом туре имеют одно поражение и ноль побед, проигравшие во втором туре имеют одну победу и одно поражение. Все вышедшие в третий тур будут иметь по итогам турнира не менее двух побед и не более одного поражения (после которого они выбыли), то есть у них количество побед больше количества поражений. Так как после каждого тура количество участников уменьшалось в два раза, то в третий тур вышло 16 участников.

Ответ

16 участников.

2. Вовочка взялся покрасить очень длинный школьный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Вовочке для этой работы?

Решение

Двух красок (скажем, белой и красной) не хватит: покрасив доску номер 1 в белый цвет, Вовочка будет вынужден покрасить в красный цвет доски с номерами 4, 5 и 7. Тогда между красными досками номер 4 и номер 7 будет ровно две доски, что нарушает требование условия. Трёх красок достаточно: Вовочка может покрасить три доски подряд в белый цвет, потом три доски в синий, потом три — в красный, потом снова три — в белый и так далее. При этом между одинаково окрашенными досками будет либо не более одной доски (если они в одной тройке), либо не менее шести (если они в разных тройках), так что условие задачи будет выполнено.

Ответ

3 краски.

3. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, график которой пересекает оси координат в вершинах прямоугольного треугольника.

Ответ

Например, $y = x^2 - 1$.

4. Представьте числовое выражение $2\cdot 2018^2 + 2\cdot 2019^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Решение

Первый способ. Пусть $a = 2018$.

$$2\cdot 2018^2 + 2\cdot 2019^2 = 2a^2 + 2(a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 2 = (2a + 1)^2 + 1^2 = 4037^2 + 1^2.$$

Второй способ. Воспользовавшись формулой $2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$, получим тот же результат.

Ответ

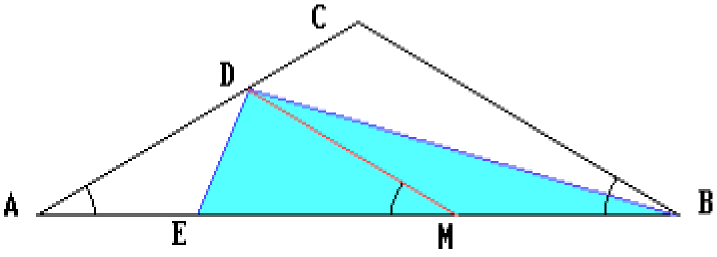
$4037^2 + 1^2$. Возможны другие ответы.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса BD. На прямой AB взята точка E так, что $\angle EDB = 90°$. Найдите BE, если $AD = 1$.

Подсказка: Соедините точку D с серединой отрезка BE.

Решение

Пусть M – середина BE. Тогда DM – медиана прямоугольного треугольника EDC, проведённая к гипотенузе EB, поэтому $DM = ½\ BE = BM$. Значит, $\angle DMA = 2\angle MBD = \angle B = \angle A = \angle DAM$. следовательно, $DM = DA = 1$, $BE = 2DM = 2$.



Ответ

2.